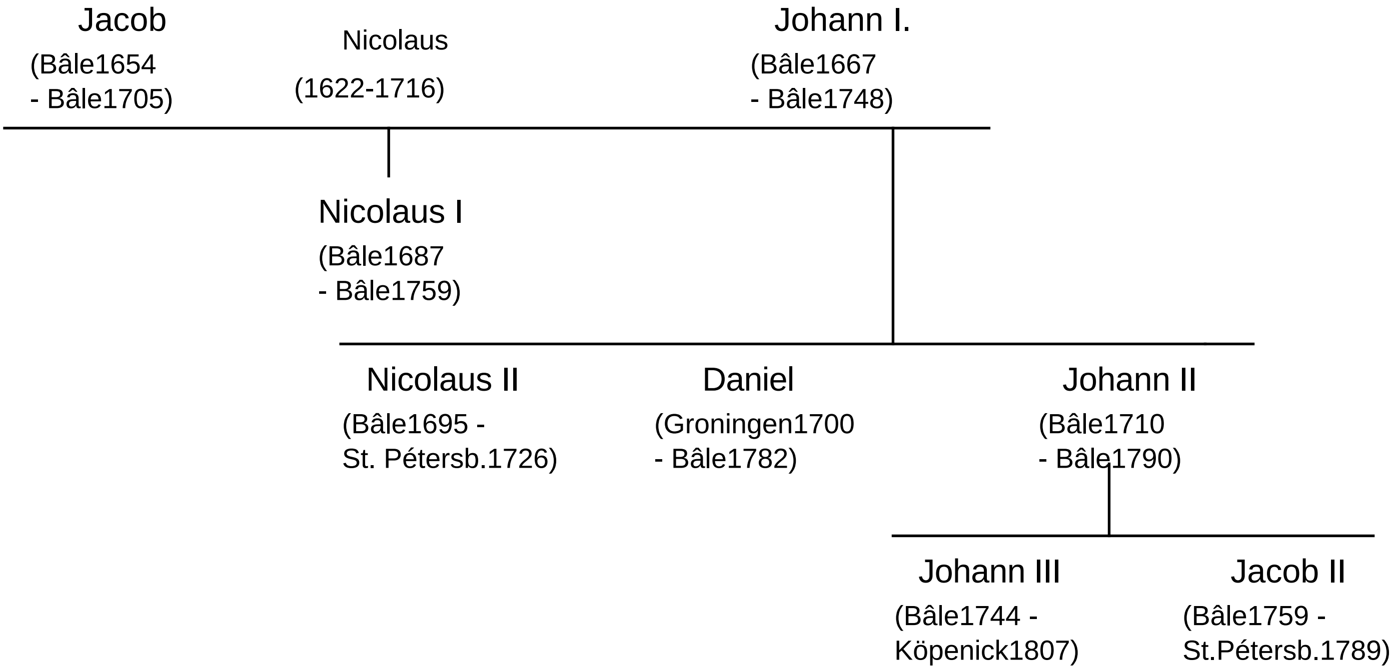
Les Bernoulli

P. Radelet de Grave

La famille Bernoulli est l'un des rares exemples de dynastie consacrée à la science.



Provenant probablement d'Espagne, Les Bernoulli sont passés par Anvers qu'ils quittèrent vers 1567 en tant que réfugiés protestants, pour Francfort, puis pour différentes villes d'Allemagne et de Suisse. Le 13 mai 1622, Jacob Bernoulli, le grand père des deux frères Jacob et Johann qui figurent en première ligne de l'arbre généalogique, est enregistré comme bourgeois de la ville de Bâle.

Quelques remarques biographiques:

Tous les Bernoulli sont nés à Bâle. Seul Daniel fait exception, il est né Groningen alors que son père Johann I enseignait la physique expérimentale à l'Université de cette ville.

Leurs formations sont également très semblables. Ils font d'abord des études universitaires. Jacob a étudié la théologie ce qui l'amène à cet période proche de la condamnation de Galilée, à s'intéresser très tôt à l'astronomie. Johann I et Daniel étaient médecins comme en témoignent leurs travaux de jeunesse où l'on trouve un point de vue très mécaniste de la médecine. Johann considère les muscles comme des ressorts et Daniel s'intéresse à la pression du sang dans les veines. Tous les autres sont docteurs en droit.

Après les études, viennent les voyages de formation. Jacob fut précepteur à Genève et en France et voyage ensuite en Hollande et en Angleterre. Daniel a étudié la médecine à Heidelberg et Strasbourg puis il part à Padoue où il peut enfin se consacrer, comme il le désirait, aux mathématiques. Il est ensuite engagé avec son frère Nicolaus II par Pierre le Grand, fondateur de l'Académie impériale des Sciences, à St. Pétersbourg où il sera rejoint par L. Euler, son compagnon de toujours. Daniel reste à St Pétersbourg jusqu'à la mort, en 1733, de son frère à qui Catherine I fit des funérailles nationales. Jacob II est lui aussi mort jeune, noyé dans la Néva à St Pétersbourg où ses voyages l'avaient mené après Turin et Venise et où il avait épousé la petite fille d'Euler.

Finalement, ils ont eu, presque tous des responsabilités académiques et des élèves. Jacob reçoit la chaire de mathématique de l'université de Bâle en 1687. Parmi ses élèves on compte non seulement Paul Euler qui sera à son tour le professeur de son fils Leonhard, mais encore Jacob Hermann et Nicolaus I. Il enseigne également les mathématiques à son frère cadet, Johann I qui fut ensuite professeur à Groningue avant de lui succéder à l'université de Bâle. Johann I eut un très grand nombre d'étudiants, parmi lesquels Leonhard Euler, Clairaut et Maupertuis. Nicolaus I neveu de Jacob et de Johann I fut professeur à Padoue puis à Bâle où il devint recteur.

Deux exceptions, Johann II et Johann III. Le premier se considérait lui-même comme paresseux et a peu publié. Il était en relation avec Maupertuis qui l'avait accompagné à Cirey pour y rencontrer Voltaire et la marquise du Châtelet. Maupertuis mourut dans sa maison bâloise du Engelhof peu après sa querelle avec Voltaire. Quant à Johann III, il était un voyageur infatigable qui a rencontré la plupart des grands savants de son époque et ses relations de voyages sont précieuses pour la connaissance de l'Europe scientifique de l'époque mais ses contributions scientifiques sont moins originales.

I. le calcul des probabilités

B. L. van der Waerden a écrit que *La théorie des probabilités fut créée, pratiquement à partir de rien, par Ch. Huygens et Jacob Bernoulli.* Les seuls prédécesseurs qu'il mentionne sont Cardan, Fermat et Pascal.

Le grand écrit de Jacob, consacré à l'*Ars conjectandi* , l'art de conjecturer est composé vers la fin de sa vie et publié après sa mort par son neveu Nicolaus I. Le titre de cet ouvrage marque le changement par rapport aux analyses des jeux de hasard de ses prédécesseurs. Jacob perçoit la possibilité d'appliquer ce calcul à un très grand nombre de problèmes comme il l'écrit à Leibniz le 3 octobre 1703, *bien que j'ai terminé la plus grande partie de mon livre, il manque encore la partie la plus importante dans laquelle je montre comment on peut* *appliquer les bases de mon art de conjecturer à la sociologie, à la moralité et à l'économie.* Son neveu et élève, Nicolaus I l'appliquera pour sa part au droit dans son *De usu artis conjectandi in iure* et Daniel poursuivra la tâche en ouvrant la voie du calcul d'erreur.

Les accomplissements de cet ouvrage sont nombreux. Jacob y retrouve un résultat important qui avait déjà été prouvé, à son insu, par Pascal. Les combinaisons de n éléments pris k à k, que nous notons $\binom{n}{k}$ est donné par l'expression $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \dots \frac{n-k+1}{k}$.

La notion importante d'espérance mathématique est déjà au centre du*Van rekening in spellen van geluck,* du calcul des jeux de hasard de Christiaan Huygens, mais il ne lui attribue pas de terme technique particulier. Il se contente de dire : *cela a autant de valeur pour moi* que van Schooten traduit en latin au moyen du terme *expectatio.* Jacob reprend cette idée et introduit le terme technique pour devenir *valor expectationis.* soulignant ainsi l'importance qu'il attribue à cette notion.

Dans la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*. se trouve la loi des grands nombres dont P. S. Laplace dira dans son *Essai philosophique sur les probabilités: Ce théorème indiqué par le bon sens était difficile à démontrer par l'analyse. Aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée.*. Jacob décrit cette loi de la manière suivante: *Il reste en effet à déterminer si en augmentant le nombre d'observations la probabilité augmente, de manière à ce que le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas défavorables atteigne le rapport exact et que cette probabilité dépasse n'importe quel degré de certitude ou bien si le problème a plutôt ce que l'on pourrait appeler une asymptote, c'est-à-dire qu'il existe un certain degré de certitude, d'avoir trouvé le rapport réel des cas, lequel ne pourra pas être dépassé lors de la multiplication des observations.*

Les nombres de Bernoulli sont décrits dans l'*Ars conjectandi* à l'occasion de l'évaluation de séries de puissances, une question très ancienne qui intervient fréquemment dans les calculs de probabilité:

$$\sum_{c} n^{c} = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^{c} + \frac{1}{2}\binom{c}{1} A\, n^{c-1} + \frac{1}{4}\binom{c}{3} B\, n^{c-3} + \frac{1}{6}\binom{c}{5} C\, n^{c-5} + \frac{1}{6}\binom{c}{7} D^{\,c-7} \text{ etc.}$$

où les A, B, C, D, &c. qui désignent successivement les coefficients de n dans les expressions de $\sum n^2$, $\sum n^4$, $\sum n^6$, $\sum n^8$, sont ces nombres. Les quatre premiers sont

$$A = \frac{1}{6}\ ;\ B = -\frac{1}{30}\ ;\ C = \frac{1}{42}\ ;\ D = -\frac{1}{30}\ ; \dots$$

Pour une puissance donnée la somme des coefficients du polynome vaut 1, ce qui permet de déterminer ces nombres.

Jacob a dirigé cinq thèses de doctorats sur la somme de séries infinies parmi lesquelles celles de Jacob Hermann et de Nicolaus I. Ces thèses avaient été pensées par Jacob comme devant composer un seul traité organisé. Elles furent rassemblées par Nicolaus I et publiées à la suite de l'*Ars conjectandi*. L'un des résultats les plus importants obtenus par ce dernier est la somme de la série:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Bien que Johann Bernoulli n'ait pas publié d'articles sur les probabilités dans les journaux de son époque, il a néanmoins repris un texte à ce sujet dans ses *Opera* publiés de son vivant en 1742. Il fut donc actif dans ce domaine et a poussé Nicolaus I à rencontrer Pierre Raymond de Montmort qui tint compte de leurs remarques lors de la réédition de son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. L'une des lettres de Johann à Montmort fut d'ailleurs publiée par Montmort dans sa deuxième édition. La correspondance échangée par Montmort avec Johann I, Nicolaus I, Gabriel Cramer, l'éditeur des Opera Omnia de Jacob et Daniel Bernoulli porte essentiellement sur ce sujet, plus précisément sur ce que l'on a appelé le problème de St. Pétersbourg. Ce problème soulevé par Nicolaus I montre l'insuffisance de la définition de l'"*expectatio*" telle qu'elle avait été donnée par Jacob. *Paul joue à croix ou pile,* explique Laplace à ce propos *avec la condition de recevoir deux francs s'il amène la croix au premier coup; quatre francs, s'il ne l'amène qu'au second; huit francs, s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite. Sa mise au jeu doit être ... égale au nombre des coups en sorte que si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant, aucun homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu une somme même modique, cinquante francs, par exemple. D'où vient cette différence entre le résultat du calcul, et l'indication du sens commun?*

La difficulté avait été élucidée par G. Cramer : ... *Les mathématiciens estiment l'argent à proportion de sa quantité, les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils peuvent en faire, ...* et Daniel mit un point final à la discussion dans son *Specimen theoriae novae de mensura sortis* en introduisant la notion d'émolument qui deviendra l'espérance morale chez Laplace.

Ce travail n'était pas le premier que Daniel consacrait aux probabilités. Dans l'une de ses premières publications *Exercitationes mathematicae*, publiée en 1724 durant son séjour à Padoue Daniel avait traité le problème posé par un jeu de carte nommé jeu du Pharaon. Il s'agit encore ici de déterminer les cas possibles et les cas favorables et de sommer des séries. Dans le même écrit il donne la première solution d'une équation différentielleproposée par Riccati : x^m dq = du + uu dx:q

Daniel fut le premier à appliquer les probabilités à un problème d'astronomie. Sachant que le plus grand angle entre deux orbites de planètes, la Terre et Mercure en l'occurrence, est de 6,5°, Daniel montre que, si la répartition est suposée quelconque à l'origine des temps, la probabilité que les angles soient compris entre des limites aussi étroites est tellement petite qu'il est moralement impossible, l'expression est de Jacob, que les choses se passent ainsi. Il faut donc chercher une raison physique à ce phénomène.

Enfin, en 1760, au moyen du calcul des probabilités, il défend l'inoculation -il ne s'agit pas encore du vaccin- ce qui l'entraîne dans l'une de ses nombreuses discussions avec d'Alembert. Daniel aborde le problème statistiquement en se basant sur les tables de mortalité. *D'Alembert attaque l'analyse de Bernoulli*, .explique Laplace, *en ce que l'on n'y faisait point entrer la comparaison d'un danger prochain, quoique très petit, de périr de l'inoculation, au danger beaucoup plus grand mais éloigné de succomber à la petite vérole naturelle. Cette considération qui disparaît lorsque l'on considère un très grand nombre d'individus, est par là indifférente aux gouvernements, et laisse subsister pour eux les avantages de l'inoculation; mais elle est d'un grand poids pour un père de famille qui doit craindre, en faisant inoculer ses enfants, de voir périr ce qu'il a de plus cher au monde et d'en être la cause.*

Daniel se livre à d'autres études statistiques; il évalue la durée moyenne des mariages et le montant des rentes viagères. Il fait également les premiers calculs d'erreur à l'occasion de ses travaux sur l'inclinaison magnétique. Lorsqu'il veut juger de la qualité d'une boussole d'inclinaison, il considère les erreurs comme négligeables ou non par rapport à la quantité à mesurer.

En 1765, Johann III Bernoulli, propose également un texte de probabilité sur *les suites ou séquences dans la loterie de Gènes*, qui avait pour but d'élire les membres du gouvernement. Nicolaus I et Euler s'intéressèrent au même problème.

II. Le développement du calcul infinitésimal

En 1684, Leibniz publie la *Nova methodus pro maximis et minimis* dans laquelle il donne succinctement les rudiments du calcul différentiel qu'il élaborait depuis 1675. Il faudra plusieurs générations, à la suite de Jacob et Johann Bernoulli pour l'élaborer pleinement.

Un calcul équivalent, mais formellement différent, le calcul des fluxions, avait été inventé mais non publié par Newton dès 1665. Tardivement, une querelle de priorité s'allume au cours de laquelle Leibniz fut défendu par Johann et par Nicolaus II.

En 1712, Johann avait déjà eu des démêlés avec Newton, il avait relevé une erreur dans l'étude du mouvement circulaire en milieu résistant publiée au livre deux des *Principia*. Elle fut reconnue par Newton et corrigée dans la troisième édition de ses *Principia*, malheureusement en omettant de mentionner la personne qui les lui avait signalées.

La querelle qui continue à opposer Johann, après la mort de Leibniz, aux Anglais porte sur des problèmes de mouvement en milieu résistant et de familles de courbes orthogonales. Elle a également occupé Nicolaus I et II ainsi que Jacob Hermann.

Revenons au début de l'histoire telle que racontée par Johann dans son autobiographie :*par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon frère et moi sur un écrit de Mr. Leibnitz inséré dans les actes de Leipzig de 1684, où en 5 ou 6 pages seulement il donne une idée fort légère du Calcul différentiel, ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours tout le secret, témoin quantité de pièces que nous publiâmes ensuite sur le sujet des infiniment petits.*

Ils se sont d'abord attelés aux problèmes proposés par Leibniz lui-même à la fin de son texte. Ces problèmes déjà résolus étaient présentés comme exercices pour développer la nouvelle méthode. Il s'agit du Problème de Fermat qui étudie le passage d'un rayon lumineux d'un milieu vers un milieu différent et redonne la loi de Snell et du Problème posé par de Beaune à Descartes.

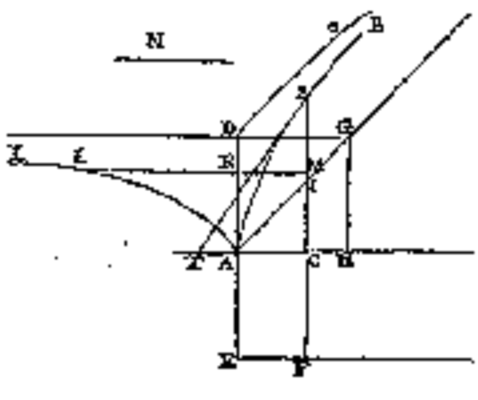


Fig. Streit p. 156.

Johann le pose de la manière suivante : *Une ligne droite quelconque N estant donnée, & ayant mené deux autres lignes indéfinies AC, AI, en sorte que l'angle CAI soit de 45 degrez; on demande la manière de décrire la courbe ABB qui soit* *de telle nature que si l'on mène d'un de ses points quelconques B, l'ordonnée BC & la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la mesme que celle de la droite donnée N à BI.*

Pour la première fois, un problème est réduit à une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{y - x}$$

Plus tard, Leibniz pose le problème de l'isochrone qui consiste à déterminer la ligne de descente par laquelle un corps pesant descend uniformément et s'approche également de l'horizon en des temps égaux. Huygens a montré qu'il s'agit d'une cycloïde.

La suite nous est révélée par l'autobiographie de Johann *Je fus le premier, qui songeait à inventer quelque méthode pour remonter des quantités infiniment petites aux finies dont celles-là sont les éléments ou les différences. Je donnai à cette méthode le nom de Calcul intégral, n'en ayant point trouvé alors de plus convenable.* Puis comment le cadet enrôla le frère aîné : *je lui proposai plusieurs problèmes physico-mécaniques, entre autres celui de la chaînette, qui est de déterminer la courbure d'une chaîne lâche suspendu par les deux bouts; mais comme il ne put y réussir, pendant que je l'avais résolu pleinement, je l'engageai à proposer aux géomètres ce problème dans les Actes de Leipzig, où après un temps considérable il ne parut que trois solutions (conformes au fond entre elles) savoir celle de Mr. Leibnitz, celle de Mr. Huguens et la mienne, voir les actes de Leipzig de 1691* où les solutions furent publiées.

Peu après, alors que Johann est à Groningue, les relations se dégradent entre les deux frères. Ils continueront à travailler dans la même direction mais en se défiant mutuellement de trouver la solution des problèmes qu'ils posaient. Parmi ceux-ci, celui de la brachystochrone qui fut proposé par Johann. Il s'agit de déterminer la courbe de descente la plus rapide. Le terme de Brachystochrone tombera en désuétude puisque la courbe cherchée est une cycloïde qui était connue depuis longtemps même si on l'appelait parfois roulette. Leibniz et Newton furent parmi les premiers à résoudre ce problème. L'étude de ce problème donne naissance au calcul variationnel.

Parallèlement, Jacob s'intéresse aux spirales et découvre l'expression différentielle du rayon de courbure. Cette découverte qu'il appelait son *theorema aureum* lui permettait de transcrire dans le langage du nouveau Calcul tous les théorèmes acquis par l'ancienne géométrie qui faisait largement appel aux développées et aux développantes qui sont liées au moyen du rayon de courbure. La développée d'une courbe est le lieu de ses centres de courbure.

A cette occasion il met en équation la spirale logarithmique dite de Bernoulli et montre que sa développée est une spirale identique, raison pour laquelle il demandera que l'on grave une telle spirale sur sa tombe accompagnée des mots EADEM MUTATA RESURGO, je renais semblable à moi-même. Son souhait fut réalisé mais malheureusement le graveur a remplacé la spirale logarithmique par une spirale archimédéenne probablement pour raisons de facilité. La spirale archimédienne a un pas fixe alors que la spirale qu'affectionnait Bernoulli va s'évasant comme la coquille d'un escargot.

Au cours de ces mêmes travaux Jacob a découvert la lemniscate à laquelle on associe également son nom. Cette courbe fait partie, comme Euler le montrera en 1744, des courbes élastiques dont l'étude donne naissance à la théorie des intégrales elliptiques qui fut développée par Euler.

Durant quelques mois vers la fin de 1691, Johann enseigne le nouveau calcul au Marquis de l'Hopital qui publie, en 1696, le premier traité de calcul différentiel l'*Analyse des infiniment petits.* Johann publiera de son côté la partie portant sur le calcul intégral dans ses *Opera*. Le manuscrit de ses leçons sur le calcul différentiel ne sera publié qu'en 1922. On y retrouve les nombreux problèmes qui viennent d'être évoqués.

Faisant suite à l'étude de la caténaire, plusieurs problèmes d'élasticité sont posés par Jacob et Johann. Il s'agit de l'Elastica qui est la courbe d'une poutre encastrée soumise à l'action d'un poids placé à son extrémité, de la voilière ou voile poussée par le vent et de la lintearia, linge rempli de liquide.

C'est dans une publication sur l'Elastica que Jacob livre au public son expression différentielle du rayon de courbure. Ce problème confronte immédiatement celui qui l'étudie, avec la difficulté de connaître la loi constitutive qui lie l'élongation du matériau que l'on plie à la force que l'on applique. Cette loi peut être très simple comme dans le cas de la loi linéaire proposée par Hooke. Mais, en général, le matériau n'obéit pas à une loi aussi simple. Jacob s'en aperçoit très vite et trace une courbe de tension générale non linéaire.

On peut penser que Jacob pose le problème des isopérimètres pour arriver à déterminer la loi constitutive à partir de la mesure de la courbure d'une certaine lame. Ce problème a pour but de déterminer parmi les courbes de même longueur celle qui satisfait à une condition d'extremum. Etant donné que la poutre courbée a une propriété isopérimétrique, en effet, la fibre neutre garde toujours la même longueur, il peut espérer, connaissant toutes les isopérimètres théoriquement possibles, pouvoir confronter la mesure d'une courbe de l'élastique donnée et tirer du graphique la loi constitutive. Pour cela, il suffit de mener la raisonnement inverse de celui qui l'a mené à l'équation de l'Elastica.

Dans un dernier texte qui ne sera publié qu'après sa mort Jacob a l'idée de généraliser la caténaire en considérant un fil sur lequel agissent des puissances quelconques. Parmi les cas particuliers il trouve le cercle, la lintearia l'Elastica, la velaria.... Dans ce dernier texte, Jacob utilise afin de déterminer la tension dans la corde la loi de composition des forces, sous la forme de la loi des sinus de Varignon. Cette loi était connue mais Jacob a toujours préféré faire appel à la loi d'équilibre du levier. Il en résulte que Jacob est l'un des rares auteurs de cette époque chez qui cohabitent en statique la loi du levier et le calcul différentiel. La loi du levier est étroitement liée à la théorie des proportions alors que la loi du parallélogramme en est le pendant pour le calcul différentiel.

En 1728, Daniel Bernoulli, reprend l'idée de Jacob, mais entre-temps il a découvert la puissance de la loi du parallélogramme des forces qu'il a démontré axiomatiquement deux ans plus tôt. Il peut se contenter de deux types de forces, les unes verticales et les autres perpendiculaires à la courbe. Tous les autres cas seront des compositions de celles-ci. Puis il traite l'Elastica, qu'il particularise au cas de la lame sans poids puis à celui de la lame sous son propre poids qu'il reporte à plus tard. Il ne le fera jamais mais permettra à Euler de réaliser cette étude dans le contexte du problème des isopérimètres. En effet pour clore cette étude, un élément manque à Euler qui l'avoue à Daniel Bernoulli dans une lettre du 5/5/1739. Il ne trouve pas l'expression de la *"quantité de force potentielle"* qu'il faut rendre extrémale dans le cas de l'Elastica. Daniel lui répond trois ans plus tard que c'est $\int \frac{ds}{R^2}$, permettant ainsi à Euler de terminer son étude.

Daniel Bernoulli, tout comme Euler, ne se contente pas d'étudier l'élasticité statique mais s'intéresse également aux oscillations d'une corde ou d'une lame élastique. Cette étude donne à Daniel l'occasion d'une de ses plus belles découvertes, comme d'une nouvelle querelle avec d'Alembert. Daniel montre que les oscillations d'une corde vibrante peuvent toujours se ramener à une superposition d'oscillations plus simples. Autrement dit, toute oscillation est une superposition de modes propres. Cette remarque ouvre la porte qui conduira aux séries de Fourier.

Ce domaine sera poursuivi par Jacob II qui abordera le problème de la plaque vibrante mais qu'une mort accidentelle empêchera de mener sa tâche à bien. Johann II fut également actif dans ce domaine et donne la première théorie des oscillations transversales de l'éther, c'est-à-dire du fluide responsable de la transmission de l'électricité. Ce qui en fait un précurseur important de Maxwell.

Johann III a commencé par concentrer ses efforts dans cette direction. En 1766, il a publié plusieurs travaux sur *l'extension que souffrent les fils avant de se rompre,* ; *la force et la courbure des lames élastiques,* et finalement *la résistance des poutres,*. Il aborde là des problèmes qui restent épineux pour les scientifiques de notre époque.

III. Fondements de la mécanique

Un cas très particulier de la loi de conservation du moment angulaire est connu depuis l'antiquité, il s'agit de la loi d'équilibre du levier ou de la balance. Bien qu'il s'agisse d'une loi d'équilibre Jacob Bernoulli, comme l'a souligné Truesdell, est le premier à avoir tenté une généralisation en appliquant cette loi à l'étude du mouvement d'un pendule physique. Il fait ainsi un pas important vers la compréhension de la loi de conservation du moment angulaire pour les corps rigides.

Une divergence de points de vue à laquelle on a donner ensuite le nom de querelle des forces vives éclate entre Leibniz et Descartes à propos de l'affirmation de ce dernier : *Que Dieu est la première cause du mouvement, et qu'il en conserve toujours une égale quantité en l'univers.* Cette querelle est occasionnée par la confusion entre quantité de mouvement, énergie et travail, force. L'imprécision est d'abord au niveau du vocabulaire: force, puissance, vertu qualifient tour à tour ces différentes notions qui n'ont pas la même dimension physique. A l'occasion de la réflexion qu'elle entraîne, Johann Bernoulli et Leibniz, à la suite de Huygens développent la notion d'énergie et de travail et permettent à *Jean Bernoulli* [d'être] *le premier,* écrit Lagrange dans la Mécanique analytique *qui ait aperçu cette grande généralité du principe des vitesses virtuelles, et son utilité pour résoudre les problèmes de statique.* Ce principe variationnel, plus connu sous le nom de principe des travaux virtuels, sera généralisé par le même Lagrange. Il exprime qu'un système soumis à des contraintes qui n'effectuent pas de travail, est en équilibre si le travail virtuel des forces appliquées est nul lors d'un déplacement infinitésimal compatible avec les contraintes.

Daniel Bernoulli avant d'Alembert montre que la querelle des forces vives n'est qu'une querelle de mots, mais qu'elle recouvre la précision de notions importantes. Elle recouvre encore la perception des différence qui existent entre les grandeurs mathématiques qui représentent les quantités en causes. La quantité de mouvement et la force sont des vecteurs alors que l'énergie et le travail sont des scalaires. Or c'est parce que Descartes ne tenait pas compte du caractère vectoriel de la quantité de mouvement que la querelle a éclaté. Il n'est donc pas étonnant que ce soit dans un article qui donne pour la première fois une démonstration axiomatique de la composition des forces que Daniel Bernoulli donne son explication de la querelle. Il faudra attendre 1886 et G. Darboux pour voir que la démonstration qu'il fournit à cette occasion est celle de l'addition vectorielle.

IV. L'hydrodynamique

Alors que S. Stevin a donné son nom à l'hydrostatique, Daniel Bernoulli publie en 1738, un ouvrage dont le sujet *est la force et le mouvement des fluides; et pour les renfermer l'un et l'autre en un mot, je l'appelle Hydrodynamica.* Selon F. Huber, Daniel Bernoulli, médecin de formation a été conduit à ces problèmes par des questions sur le mouvement du sang dans les veines. Rappelons qu'à cette époque, sous l'impulsion de Descartes, on espérait résoudre de nombreux problèmes de biologie au moyen de la mécanique et des échanges de chaleur comme en témoignent le *de motu musculorum*, du mouvement des muscles de Johann et le *de motu animalium* le mouvement des animaux de Borelli.

On trouve encore trace de telles motivations chez Daniel dans un texte postérieur proposé pour un prix de l'académie de Paris où il affirme qu'*il n'y a que le travail du coeur, qu'on peut déterminer assez exactement, puis qu'on sait qu'il fait environ 112500 battements dans un jour, qu'il pousse environ deux onces de sang dans chaque systole, & que les observations & expériences de Mr. Hales semblent prouver que le sang soit jetté hors du coeur avec une vitesse à pouvoir s'élever à la hauteur d'environ huit pieds.* Ceci expliquerait une anecdote assez macabre. Daniel allait assister à l'exécution des condamnés à mort car il cherchait à évaluer la pression dans les veines en mesurant la longueur du jet de sang lorsqu'on leur tranchait la tête.

L'Hydrodynamica contient deux résultats particulièrement importants : une démonstration de la loi de Townley-Boyle et l'équation qui porte son nom. Cette dernière décrit le mouvement d'un fluide dans un tube.

La loi de Townley-Boyle, dite des gaz parfaits, lie la pression, le volume à la température. Pour la dériver Daniel considère le gaz comme composé de corpuscules *minuscules animés d'un mouvement très rapide.* Ceci lui permet de rendre compte de l'effet d'une pression extérieure P : *ainsi ces particules qui par des collisions incessantes avec le couvercle et entre elles, forment un fluide élastique qui se détend si l'on diminue ou enlève le poids P.* Mais, il y a plus :*l'élasticité de l'air peut non seulement être augmentée par la condensation mais aussi par l'augmentation de la température, et c'est pourquoi l'on constate que la chaleur augmente le mouvement des particules internes, il en suit que l'élasticité de l'air* *augmente sans que l'espace ne change par le fait que le mouvement des particules d'air se fasse plus intense*

Daniel n'a pas encore complètement assimilé la notion de pression interne du fluide ce qui se ressent dans sa dérivation de l'équation qui porte son nom et qui décrit le mouvement d'un fluide satisfaisant l'hypothèse des sections parallèles et de non frottement contre les parois, dans une canalisation. Sa réponse lie bien, pour la première fois, la vitesse et la pression mais elle n'est valable que globalement.

L'Hydrodynamica valut à Daniel sa première dispute scientifique qui l'oppose à son père. Ce dernier avait déjà dû être irrité lorsqu'il dût partager avec ce fils, le prix de l'académie de Paris pour 1733 sur *la cause de l'inclinaison des Orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur de la révolution du soleil autour de son axe; et d'où vient que les inclinaisons de ces orbites son différentes entres elles?* Le Père qui avait publié trois ans plus tôt de *Nouvelles pensées sur le Systême de M. Descartes, Et la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planètes. Piece qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1730* y défendait ouvertement la théorie des tourbillons cartésiens même s'il s'efforçait d'introduire l'interaction newtonnienne entre les éléments infinitésimaux du tourbillon alors que le fils prenait tout aussi ouvertement le parti la nouvelle théorie de la gravitation de Newton.

L'histoire veut que le père, jaloux de *l'Hydrodynamica* de son fils, aurait publié en l'antidatant un travail sur le même sujet: *l'Hydraulica*. Avec comme résultat que personne ne lu son travail. Seul Euler fit exception comme le prouvent plusieurs lettres élogieuses qu'il lui adresse à ce sujet. Il écrit d'ailleurs à Daniel qu'il *vient de recevoir la deuxième partie de l'hydrodynamique de votre vénéré Père et* [qu'il] *l'aime énormément. En particulier, il a déterminé fondamentalement à partir de ses principes la pression de l'eau sur les bords du récipient d'une manière qui s'accorde parfaitement avec votre vénérable théorie.* Le travail de Johann complète donc celui de son fils.